



ÜBER DIE EINUNDDREISSIGTON-HEXACHORDBASIS

Jeder Ton hat eine diatonische Nachbarschaft!

Diese kurze Abhandlung beinhaltet die **Herleitung** der **31-tönigen erweiterten Mitteltönigkeit** aus der Kette der **dreifach-überlappenden Tetrachord-Kette** und somit aus der **mutierenden Hexachord-Solmisation** in Viertelkomma- & 31-Ton gleichstufiger Stimmung

Georg Vogel 2025

- 1 Tongruppen auf der Grundlage von $3/2$
- 2 Tetra- & Hexachord
- 3 In Viertelkommastimmung
- 4 Tonraumerweiterung
- 5 Enharmonische Verwechslung

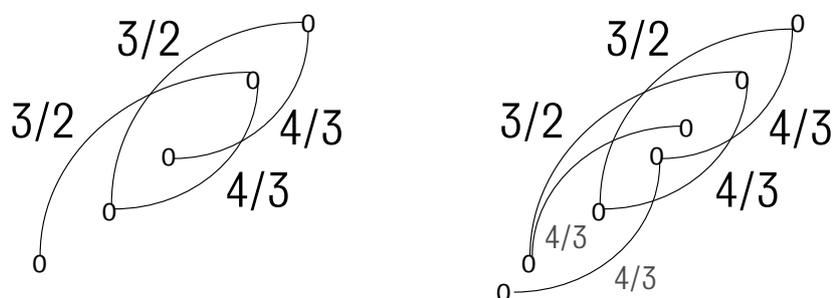
1 Tongruppen auf der Grundlage von $3/2$

Ein sehr wichtiges Intervall aus der Obertonreihe ist $3/2$, das erste nach der Verdoppelung.

Durch Stapelung und Rückholung in nächste Lage, auch mit Hilfe der Umkehrung zu $4/3$, kann ein Feld mit gleichgroßen Ganz- und in weiterer Folge auch mit Halbtönen aufgebaut werden.

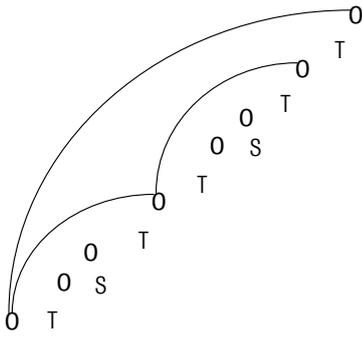
2 Tetra- & Hexachord

Bei vierfacher Stepelung entsteht die als Pentatonik bekannte Fünftongruppe,



welcher für eine durchgehende vorerst absteigende Leiter noch zwei zu ergänzende Töne fehlen, um eine in sich verschränkte sog. Quartenkette zu ergeben (Quart als vierter Ton aus der entstanden, Prime-, Sekunde-, Terz- usf-namensverursachenden Leiter).

Wird diese Oktave nun geschlossen (Acht Töne) ist ein Aufbau aus zweimal der gleichen Intervallzusammensetzung erkennbar **Ton Semiton Ton** (aufsteigend) und von diesem nochmals **Ton Semiton Ton**. Diese zwei überlappen sich bei einem gemeinsamen Ton (nachfolgend als d benannt).

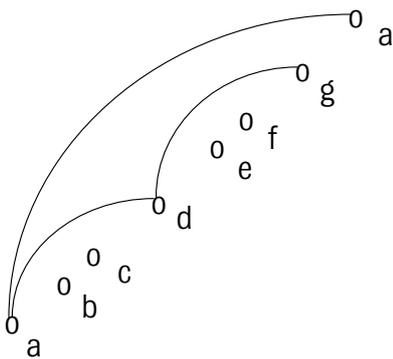


Es kann nun aber auch die ganze Kette als übereinander gelegte Ganz- & Halbton-Viertongruppen (sog. Tetrachorde) innerhalb einer Quarte gesehen und gehört werden. Dabei sind drei Aufteilung von zwei Ganztönen und einem Halbton unterscheidbar, je nach der Anordnung des Halbtones.

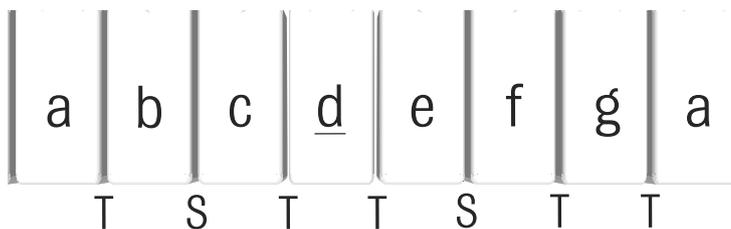
Ton Semiton Ton, Semiton Ton Ton & Ton Ton Semiton

Nun wird dies mit zwei Benennungsarten versehen:

a) Einerseits die Zuordnung der alphabetischen lateinischen Buchstabenreihe für diese nun aufsteigende Leiter:



Dieses Tonfeld ist mit Tasten vorerst ohne das Aufeinandertreffen von unterschiedlichen Tonhöhen zwischen den Tönen spielbar, so wie ein erster dazwischenliegender Ton gleich im übernächsten Schritt auftauchen wird.

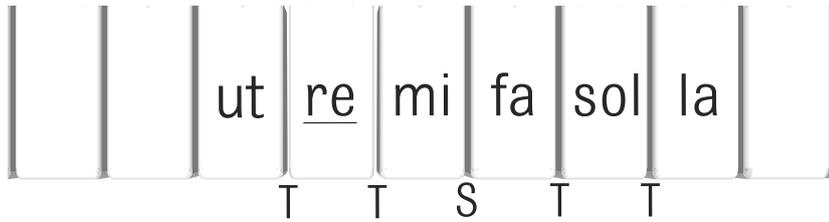


b) Sowie weiters die Benennung von Tönen dieser Leiter ausgehend von Anfangssilben eines Johannes-Hymnus:

Ut queant laxis (Phrase von **c** weg), **resonare** fibris (von **d**), **mira** gestorum (von **e**), **famuli** tuorum (von **f**), **solve** polluti (von **g**), **labii** reatum (von **a**).

Beide Benennungen beginnen von unterschiedlichen Punkten aus:

Die Buchstaben vom sog. plagalen Unterbau (Quarte tiefer) des als ersten (primus, protos) Ton festgesetzten, im Hymnus als **re** verwendeten und folglich, wie schon erwähnt als **d** bekannten Tones mit den Ober- und Unternachbarn Ton und Ton (der Spiegelachse aller nun aus diesem Konzept erwachsenden Tastaturen, bei 12, 19 wie bei 31 Tasten).



Aus den **dreifach überlappenden Tetrachorden** entsteht das **Hexachord ut-la** (mit nur einem **Halbton mi-fa!**).

Hier nochmals samt der Intervallsverhältnisse dargestellt:

T T S T T

1/1 9/8 81/64 4/3 3/2 27/16
 $3^2/2^3$ $3^4/2^6$ $2^2/3$ $3/2$ $3^3/2^4$

ut re mi fa

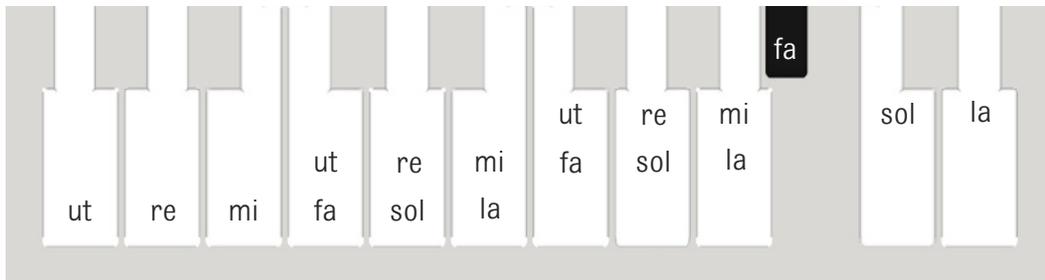
re mi fa sol

mi fa sol la

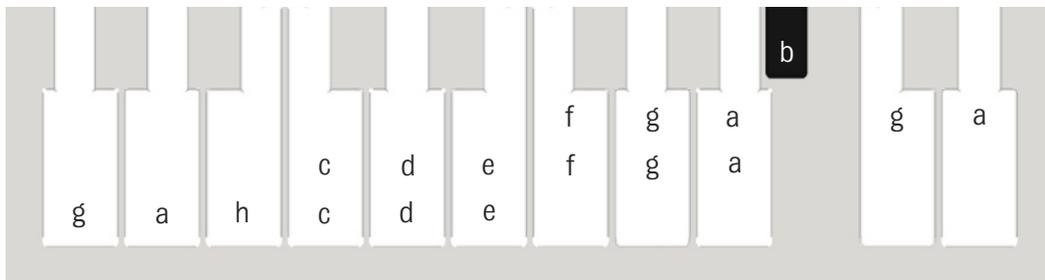
Ins Auge fällt die Deckungsgleichheit von **ut-re-mi** und **fa-sol-la!**

Dies bedeutet, dass der als ut bezeichnete Ton zu fa und fa zu ut verändert werden kann; also so wie die Tetrachorde ineinander gestellt wurden, kann dies mit der ganzen Hexachord genannten Gruppe geschehen.

Dadurch erweitert sich der Tonvorrat.



Nun ist offensichtlich, dass für das **b** zwei verschiedene Tonhöhen gebraucht werden, je nach Hexachordverortung einmal, wie vorhin als **mi** und einmal als **fa**. Zur Unterscheidung der jeweiligen Zugehörigkeit wird das mi-b als **h** notiert (formähnlich und eckiger, dem als hart benannten g-Hexachord entsprechend).



=> Durch **Transposition der Diatonik** entsteht **Chromatik**.

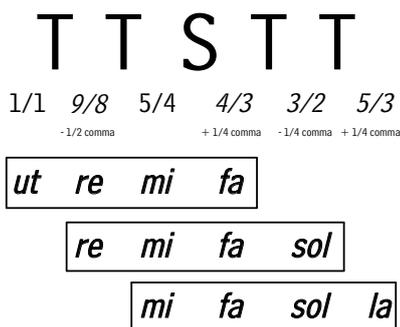
3 In Viertelkomma-Stimmung

Nun gibt die Möglichkeit in diesem Intervallgefüge, welches immer noch stimmungstechnisch rein auf der Stapelung von $3/2$ beruht, eine zusätzliche Primzahlensphäre der Obertonreihe bei der Terzenintonation hinzuzufügen:

Die sogenannt quintale große Terz $5/4$.

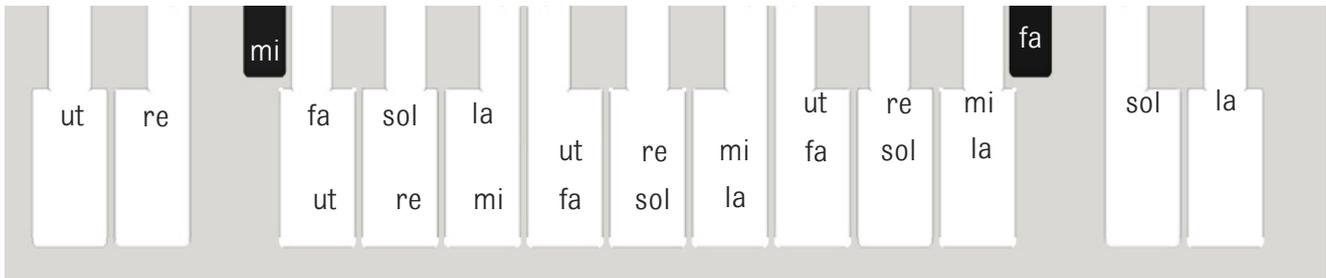
Wenn beides nun vorkommen soll, reine Quint $3/2$ und reine Terz $5/4$, dann gibt es Zusammenstöße bei der Intonation der gezeigten Kettentonleiter, da v.a. zwischen verschiedenen d- und a-Tönen unterschieden werden kann (um das sog. syntonische Komma verschiedene Intonationen, errechnet aus dem Unterschied zwischen viermal $3/2$, also 3 hoch 4 ist 81 und 5 , welches in passende Lage versetzt, also mehrfach mit 2 multipliziert, 80 ist und somit als Komma $81/80$ darstellbar ist). Auch für diesen Ansatz beides rein zu behalten gibt es Umsetzungsmöglichkeiten für ober- und untastbasierende Tastaturen.

Hier an dieser Stelle interessiert uns aber in erster Linie der darauf aufbauende Schritt, nämlich die Verkleinerung der $3/2$ -Quinten um die nun kleinere Zielterz $5/4$ nach vierfacher Stapelung zu erreichen (also temperiert um je ein Viertel des Kommas, daher der Name: **Viertelkomma-Mitteltönig** (mitteltönig, da es wiederum nur eine Ganztonart gibt, genau die Mitte von $5/4$ (anders als vorhin angedeutet bei sog. 5-Limit mit der ungleichen Teilung $9/8$ $10/9$)).

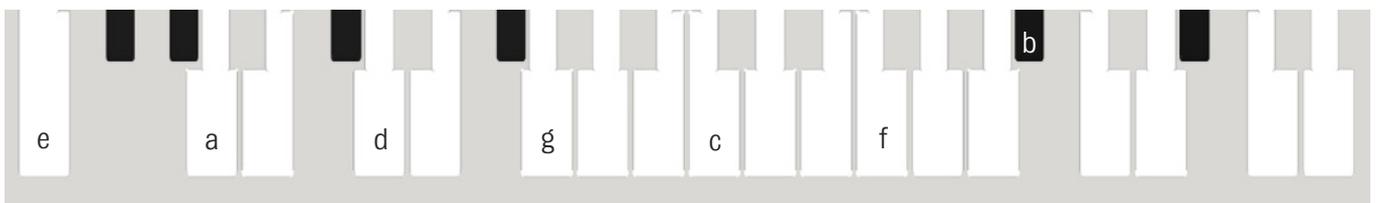


4 Tonraumerweiterung

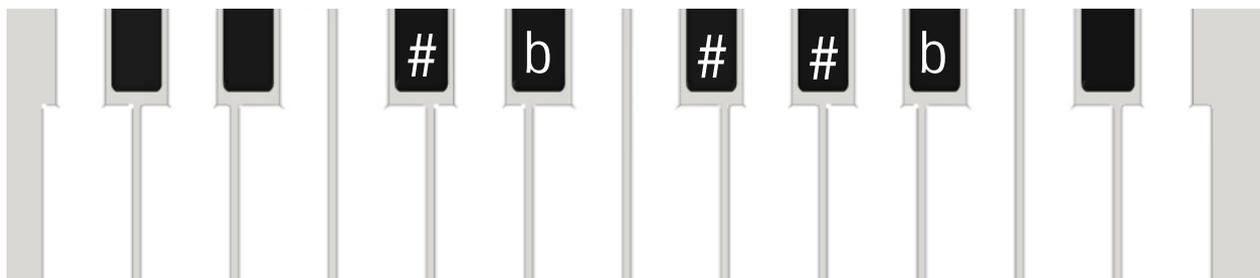
Mittelst dieser **ut zu fa** und **fa zu ut** Veränderung kann diese Tonleiter-Kette auf beiden Seiten weiter ausgedehnt werden, zunächst im Unterbau. Dabei wächst die Anzahl der Töne zwischen den Tönen: Eine Zwischentaste für das erhöhte f wird nun benötigt. In Analogie zum quadratischen b, dem h, wird daraus ein generelles Versetzungszeichen abgewandelt, welches nun für alle Untertastentöne gelten kann: **#** also **f#**.



Gefolgt von dem neuen Ton **c#**, daraufhin **g#** und im Oberbau noch eine Erweiterung zu **eb** (mit **b** als allg. Erniedrigung):

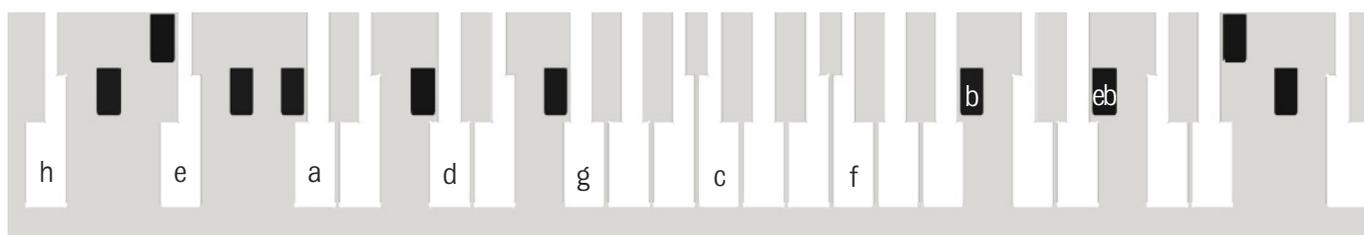


Somit ist im Oktavraum alles quasi halbtönig ausgefüllt (durch die Eigenschaften der verwendeten Stimmung nicht gleichmäßig! Unterschieden wird zwischen **diatonischem** (mi-fa) und vorzeichenschritt-entsprechendem **chromatischem** Halbton); in der aufsteigenden Reihenfolge (ab c) **# b # # b**.

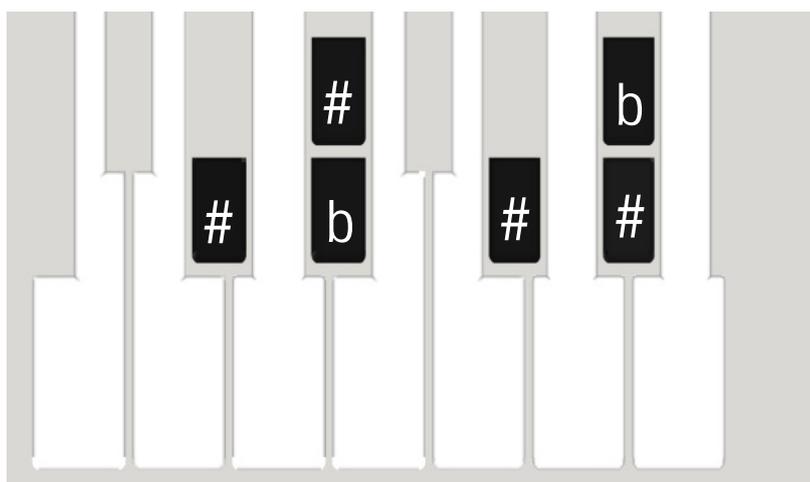


Wird diese Kette nun noch weiter verlängert, ergibt sich eine neue Art von Intonationskollision, die sog. Diesis, der (neuezeitlich-mitteltönig so benannte) **enharmonische** Aspekt.

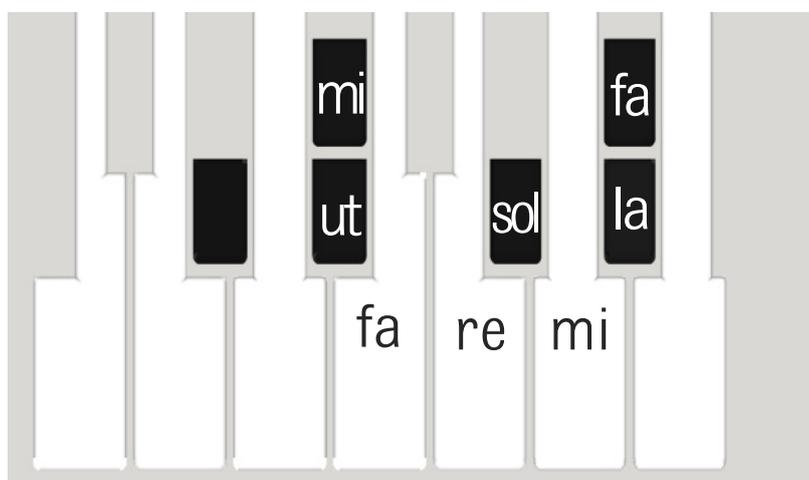
In beiden Richtungen ist der Raum zwischen den Tönen bereits mit einem Zwischenton ausgefüllt, nun kommt die jeweilige enharmonische Vertauschung dazu. Zuerst bei eb und g#. Dafür wird der Platz dahinter verwendet und es ergeben sich **geteilte Obertasten**, zunächst eben für **d#** als zusätzliches **mi** und für **ab** als **fa**.



Damit ist die zweite Reihe der Obertasten eröffnet:

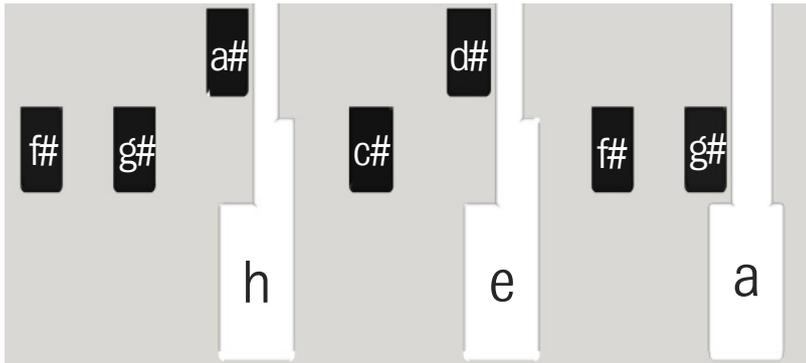
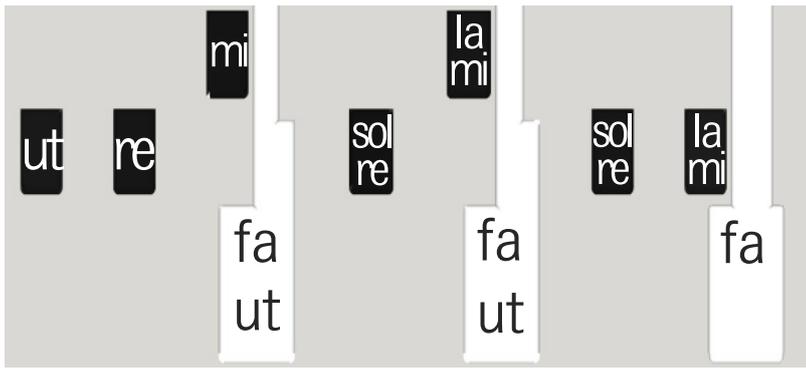


In Solmisationszuordnung:

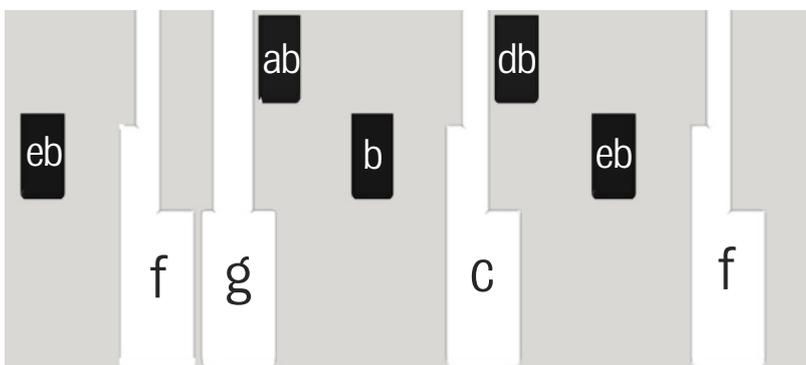
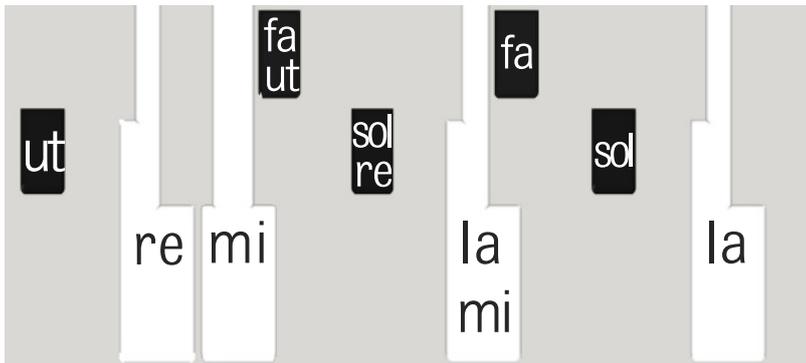


Vollständig dann **h ut** & **eb ut** noch mit h & c# als ut und re sowie b und c als sol und la.

Bei weiterer Fortspinnung gelangen wir so zu **a# mi** auf der Kreuzseite:



Sowie **db fa** auf der b-Seite:



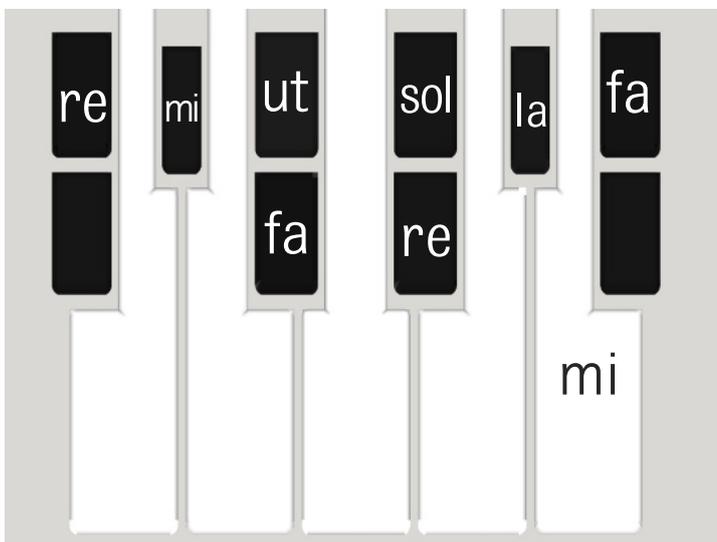
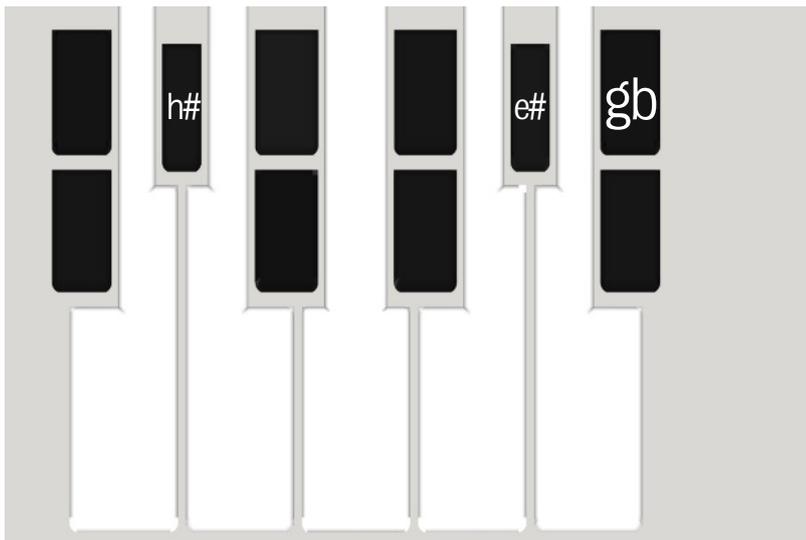
Nun haben bereits fast alle der erstreichigen sieben Obertasten eine dahinterliegende Vertauschbarkeit, einzig für **f#** kann noch ein **gb** als **fa** des db-Hexachords hinzugefügt werden.

Und um von der Ausgangslage des g-Hexachords in beide Richtungen die Hexachordanzahl durch die nun eingerichtete zweite große Obertastenreihe samt der ersten der kleinen von 7 auf 14 zu verdoppeln, werden auf der Kreuzseite noch zwei mi-s benötigt: **e#** & **h#**.

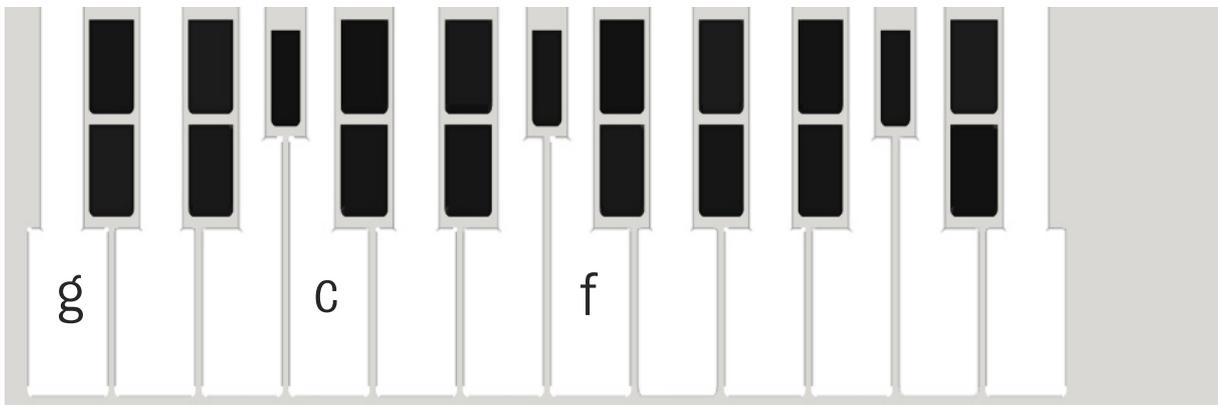
ut-Folge:

d - a - e - h - f# - c# - g#

g - c - f - b - eb - ab - db



Da nun jeder der Leiter des g & c Hexachords (also alle Untertasten) eine sog. chromatische d.h. Vorzeichenversetzungsmöglichkeit mittelst Kreuz und b hat, kann hierbei dann mit den beschriebenen 19 Tönen von einer chromatischen Tastatur gesprochen werden, daher auch der Ausdruck *cembalo/cimbalo cromatico*.



Aufsteigend in dieser Darstellung finden sich nun die folgenden Töne:

g - g# ab - a - a# b - h - h# c - c# db - d - d# eb - e - e# f - f# gb - g

Die enharmonische Vertauschung entspricht dem fünftelton-entsprechenden, in diesem Zusammenhang sogenannten Diesis-Schritt. Ausgehend von dieser Intervallgröße fallen die ‚chromatischen Löcher‘ auf: Die Vorzeichenschritte wie

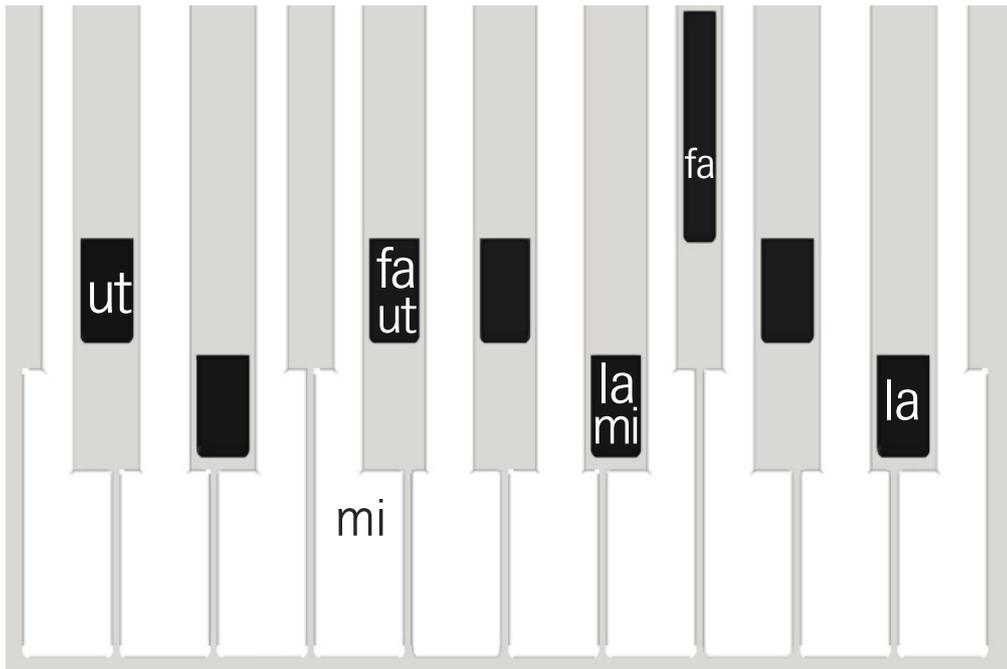
zB. von g zu g# von db zu d usf. sind ja in etwa doppelt so groß wie die Diesis und bei dieser Tonmenge noch un-
unterteilt.

Die Frage ist nun wie diese Spalten aufgefüllt werden können? Aufgrund der angedeuteten fünffachen Ganztonteilung
und der offensichtlich zweischrittigen Vorzeichenversetzung jeweils durch die Fortführung der noch ausstehenden
Versetzungen auch im Doppelvorzeichenbereich.

Beispielsweise, und wie wir gleich sehen werden von der Hexachordkette aus am nächstnaheliegendsten, durch ein **f##**
am Kreuzende unserer bisherigen Kette: Und zwar als **mi** des im g#-Keller verortbaren d#-Hexachordes.



Wie auch auf der B-Seite, wo ebenfalls damit eine neue Tastenart eingeführt wird: Ein neues **fa** im gb-Hexachord ist **cb**.



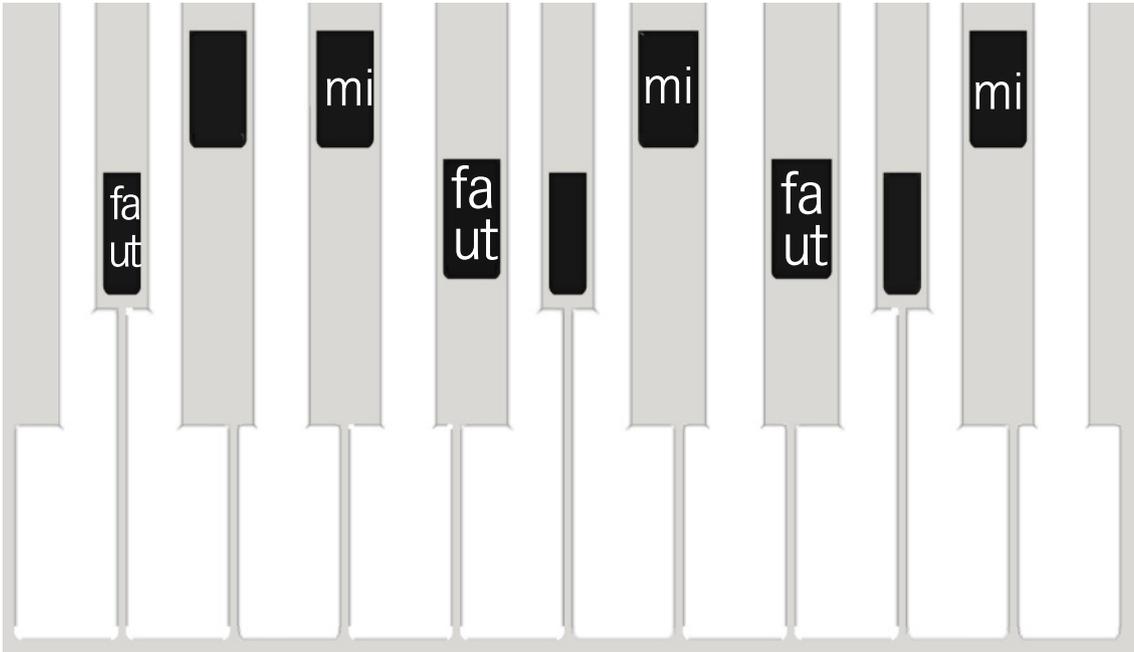
Wenn dieser Weg auf beschriebene Art noch weiter verfolgt wird und alle ut-Orte der dritten Reihe gefunden werden
sollen, ergibt sich auf beiden Seiten der Kette bald das folgende:

Bei den Kreuzen absteigend:

g# f## e# **d#**, d# c## h# **a#**, a# g## f## **e#**

Und bei den b-s aufsteigend:

gb ab b cb, **cb** db eb fb, **fb** gb ab bb (womit die dritte Reihe der großen Obertasten auch von der b-Seite erreicht ist),
bb cb db ebb



Sowie:



Wenn nun alle neu gewonnenen Töne in die vorherige Cromatico-Reihe eingetragen werden, haben sich einige Löcher geschlossen, aber noch nicht alle (die Neuen unterstrichen dargestellt):

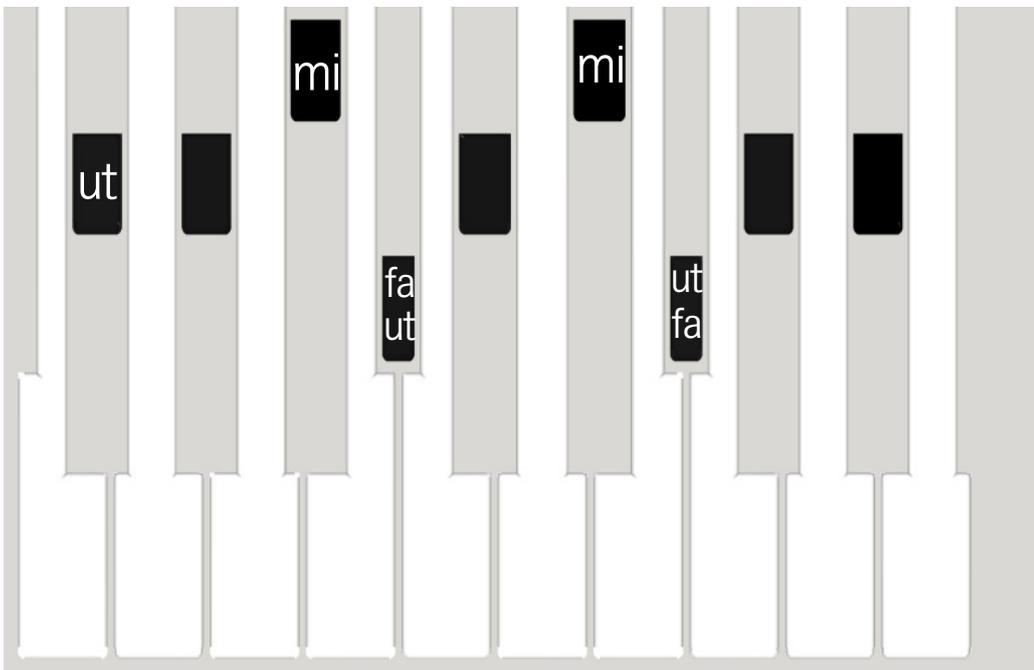
g - g# ab g## a bb a# b - h cb h# c - c# db c## d ebb d# eb - e fb e# f - f# gb f## g

Hierfür wird nun wieder an beiden Enden (derzeit ut e# und fa gb) die Kette erweitert und eine vierte Reihe eröffnet:

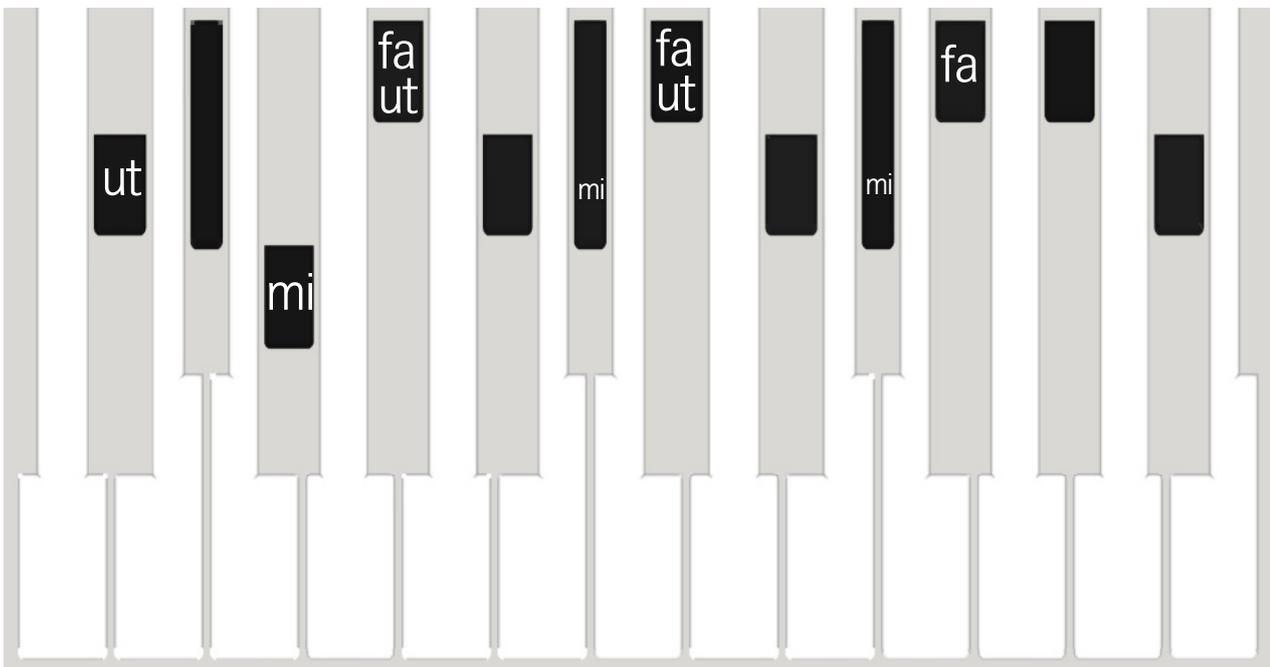
Unter dem e#-Hexachord befindet sich das von h# mit **mi d##** und darunter **mi a##**. Auf der b-Seite kommt **fa abb**, **fa dbb** und **fa gbb** dazu. Und hier gibt es nun die Möglichkeit **enharmonisch** zu **verwechseln**: Nämlich das anstehende e## ist mit diesem gbb nahezu ident (in der Viertelkommastimmung in etwa ein Viertelkomma! Somit kann die ganze Kette, wenn dieses Viertelkomma nun auf alle 31 Quinten aufgeteilt wird, zu einem Kreis geschlossen werden und 31-tönig gleichstufig musiziert werden; die Pseudo-Diesis ist nun gleich groß wie die echte.)

Zuerst noch die Darstellungen zur vierten Reihe:

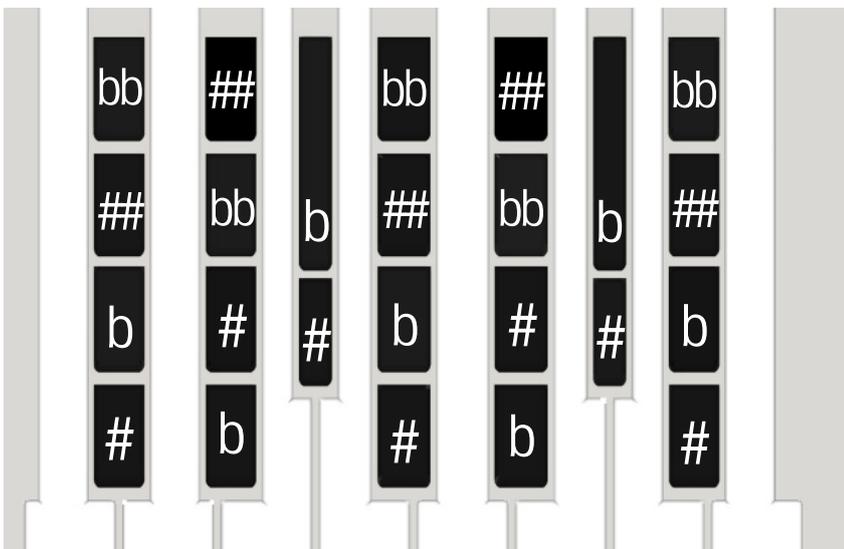
mi d## und **mi a##**:



Sowie fa abb, dbb, & gbb:



Nun ist die Tastatur komplett (dargestellt von g bis g):



5 Enharmonische Verwechslung

Der vollständige Tonvorrat ist nun:

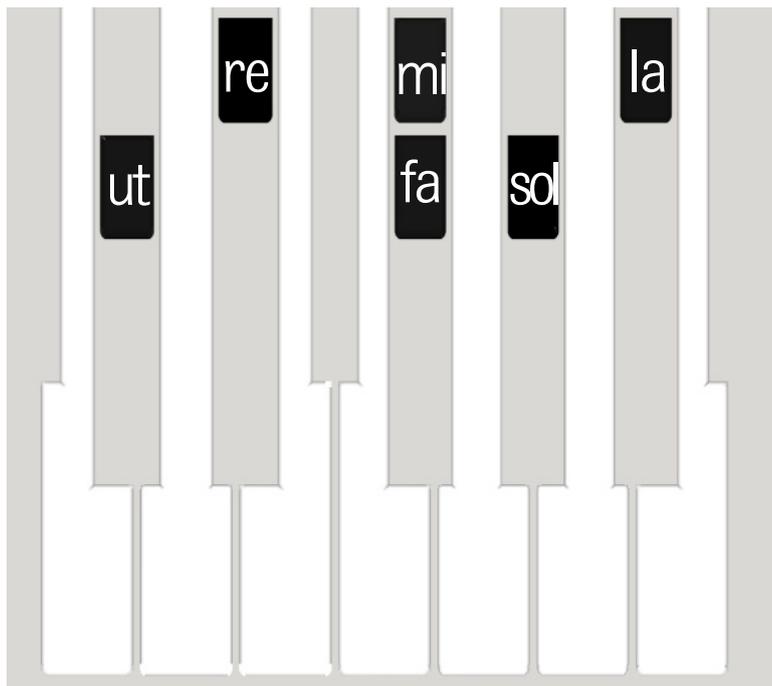
g abb g# ab g## a bb a# b a## h cb h# c dbb c# db c## d ebb d# eb d## e fb e# f gbb f# gb f## g

Da nun, wie erwähnt, **gbb** auch als **e##** und **a##** als **cbb** verwendet werden, überlappen sich die Kreuz- und b-Kette - zusammengebogen um einen Kreis zu schließen - an einigen Stellen:

Die **vierfach verminderte Terz** ist also quasi eine Prime. An den Enden kommt diese **bbbbb3** einigemal vor, so ist **dbb** gleichbedeutend mit **h##**, **abb** mit **f###**, **ebb** mit **c###**, **d##** mit **fbb**, **g##** mit **bbb**.

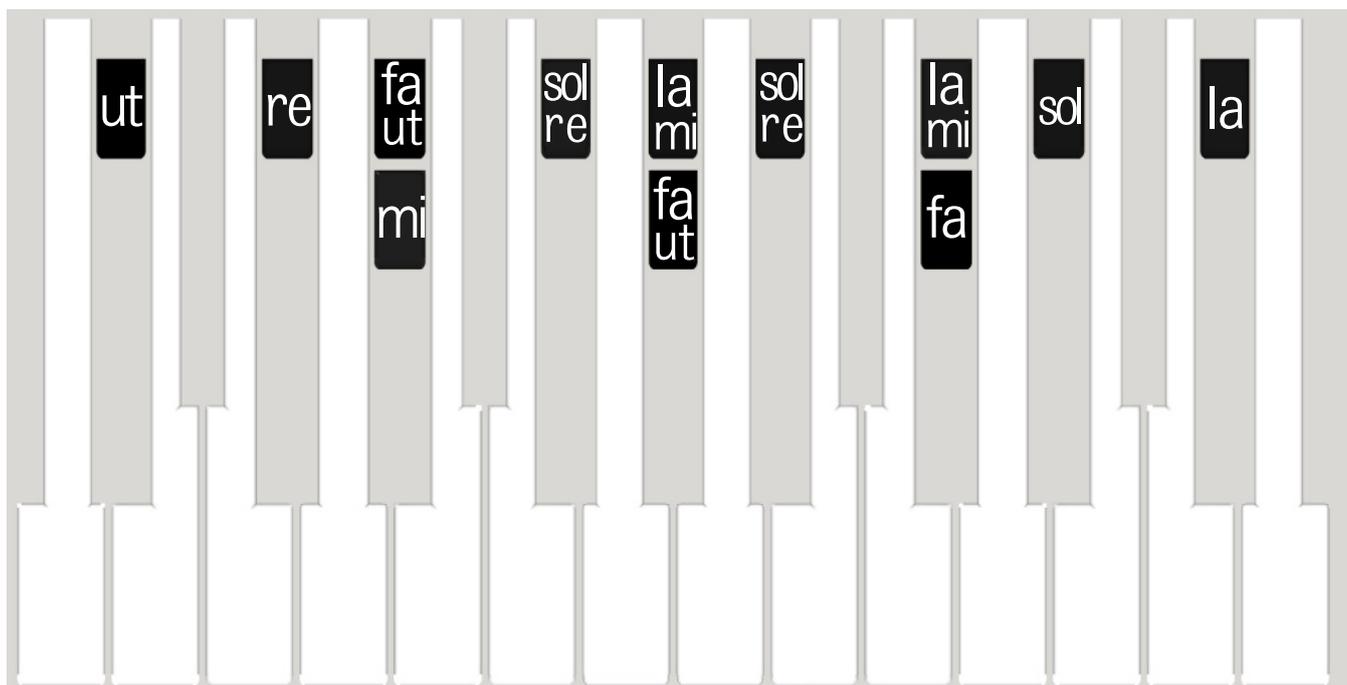
Wenn nun Hexachorde am Ende der #&b-Bereiche gegriffen werden, können die Halbtöne auch, anstatt daneben, davor und dahinter liegen:

Bei dem **c##**-Hexachord beispielsweise:

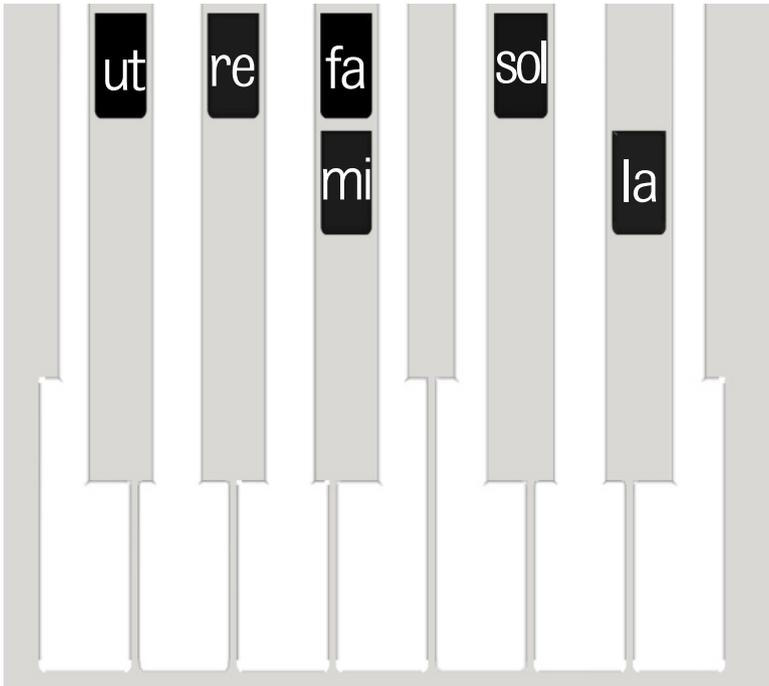


ut re mi fa sol la in **c##** ist **c## d## e## f## g##** und **a##**, und das **e##** wird nun mit der **gbb** Taste gespielt.

Weiters ähnlich auch bei **ut a##**, **ut d##** und **ut g##**.



Auf der b-Seite ebenfalls bei **ut gbb** (und **cbb, fbb, ..**)



Hier nun alle Hexachorde aufsteigend, zur b-Seite und über den Verwechslungsbereich auf die Kreuzseite:

c d e f g a
f g a b c d
b c d e b f g
e b f g a b b c
a b b c d b e b f
d b e b f g b a b b
g b a b b c b d b e b
c b d b e b f b g b a b
f b g b a b b b c b d b
b b c b d b e b b f b g b
e b b f b g b a b b b b c b
a b b b b c b d b b e b b f b
d b b e b b f b g b b a b b b b

g b b a b b b c b b/a## d b b e b b
c b b/a## d b b e b b f b b/d## g b b a b b
f b b/d## g b b a b b b b b/g## c b b/a## d b b/h##
b b b/g## c b b/a## d b b/h## e b b b/c## f b b/d## g b b/e##
e b b b/c## f b b/d## g b b/e## f## g## a##

f## g## a## h# c## d##
h# c## d## e# f## g##
e# f## g## a# h# c##
a# h# c## d# e# f##
d# e# f## g# a# h#
g# a# h# c# d# e#
c# d# e# f# g# a#
f# g# a# h# c# d#
h# c# d# e# f# g#
e# f# g# a# h# c#
a# h# c# d# e# f#
d# e# f# g# a# h#
g# a# h# c# d#

