1) Woher kommt die Klaviertastatur?

Grundlegende tonale Bausteine sind die drei Tetrachorde
TTS, ***TST*** & ***STT*** - solmisiert als *ut re mi fa*, *re mi fa sol* & *mi fa sol la*.

Innerhalb der durch diese in variablen Konstellationen sich ergebenden Tonräume können weitere Ausgangspunkte liefernde Gruppen definiert werden, wie beispielsweise die terzengeschichteten Dreiklänge.

Die Spezialität dieses Zuganges ist die Solmisierung des Halbtones einzig als *mi/fa* bzw. *fa/mi*, welcher immer in einem und/oder mehreren der erwähnten drei Tetrachorden verortbar ist. Zusammengesetzt können durch die strukturellen Ähnlichkeiten von TTS, TST & STT mehrere Verschränkungsgrade unterschieden werden; im grundlegendsten mit dreifacher Überlappung formiert sich der Hexachord *ut-la*, eine Gruppierung mit Quinten/Quarten, Terzen/Sexten sowie Semiton und Septimen aber ohne den Tritonus.

Mittelst der Mutation von *ut* zu *fa* können nun wiederum auch mehrere Hexachorde ineinandergesteckt werden woraus sich eine tonale Kette entwickelt.

All diese Schritte basieren auf der Stapelung von 3/2 der Obertonreihe, ergeben ein sog. 3-Limit Tonfeld, sind aber in erster Linie als strukturbildende Schritte zu verstehen, da die Intonation nun auch anders geartet sein kann: zwei sich daraus entwickelte Wege sollen uns hier weiter beschäftigen: zum einen die 12-Ton gleichstufige Stimmung und mit anderem Schwerpunkte die sog. mitteltönige Stimmung.

Stellen wir uns nun nebeneinanderliegende Tasten vor, sie ermöglichen die zwei verschränkten Hexachorde *g a h c d e* & *c d e f g a*. Wenn diese Inneinandersetzung in beide Richtungen fortgesetzt werden soll und die neugewonnenen Töne in allen Lagen verfügbar sein sollen, sprich oktaviert werden, dann entstehen die ersten Töne zwischen den Tönen: zu allererst das *b*, als *fa* von *f*- umgesetzt als Obertaste. Weiters das *f#* als mi unter *g*. Diese zwei Wege weiter beschreitend stossen wir auf *c#*, *eb* & *g#*. Damit sind alle 12 Tasten, 7 Unter- und 5 Obertasten hergeleitet; stimmbar (zumindest) in den drei erwähnten Arten.

Für die zwölftönig gleichstufige Stimmung muss nun nur ein kleines (sog. pythagoräisches) Komma den Quinten angelastet werden- sie sind dadurch leicht temperiert und nach wie vor die tragenden Säulen.

Eine andere Ast wächst nun aus dem Grundgebilde, wenn die Terz auf andere Art intoniert wird - unter Hinzunahme einer neuen Sphäre der Obertonreihe: dem Verhältnis 5/4 .
Diese ist kleiner als alle bisherigen großen Terzen und schließt die Oktave nicht nach dreifacher Stapelung. Der überbleibende Rest wird Diesis genannt und entspricht der Intonationsänderung bei enharmonischer Verwechslung. Um dies mit den ursprünglich konstituierenden Quinten in Einklang zu bringen, werden diese stärker temperiert; sie schweben dadurch deutlich.

Wenn nun anders als bei 12EDO, der 12-Ton Stimmung, die Hexachord-Kette nicht nach 12 Tönen zu einem Kreis geschlossen wird ergeben sich durch die spezifische Zuordnung zu den Hexachorden unterschiedliche enharmonische Intonationen; zu allererst auf unserer bislang 12-tönigen Tastatur kollidierend bei *d#* & *eb* bzw. *g#* & *ab*. Aus der verlängerten Tetra-/Hexachordkette ergeben sich diese Töne jeweils als *mi* oder *fa*, eröffnen jeweils neue tonale Räume und schaffen den Bedarf für geteilte Obertasten.
Bei Fortspinnung dieses Transpositionsprinzips ergibt sich die Tastatur mit 31 Tasten in der Oktave mit vierfach geteilten großen und einfach geteilten kleinen Obertasten.

Die enharmonische Verwechslung findet dabei im Bereiche der Doppelkreuz und Doppel-Bs statt (konkret entpricht *ex gbb*).

Bei dieser diatonischen Denkart ist eine sich auf diese Bausteine beziehende bzw. solcherart analysierbare Musik auf beiden Tastaturarten zum Klingen zu bringen, mit unterschiedlichen Resultaten, bedingt durch die Begünstigungen der vorkommenden Intervalle der Obertonreihe.

Dazu eine kurze Übersicht: 12EDO begünstigt die Quinten 3/2 und der Halbton, die kl. Terz und der Tritonus sind nahe an Verhältnissen basierend auf dem 17. und 19. Oberton.
Anders in der mitteltönigen Welt, wo die Quinten 3/2 merklich gestaucht sind, dafür aber 5/4 rein bzw. annähernd rein bei 31EDO sowie auch die sog. Naturseptime 7/4 zu finden sind; samt aller ihrer Kombinationsmöglichkeiten. Weiters ergeben sich gute Annäherungen für den 11. und 13. Oberton, welche auch zusammen mit dem 17. und 19. in einigen resultierenden Intervallen vorkommen können. Damit hat dieses System auch eine Brückenfunktion bei möglichen Verbindungen von Zugängen versammelt hinter Diatonik, Chromatik, Enharmonik, Mikrotonalität, Spektralismus, u.a..

2) Allgemein

Was bei einem Intervall klingt, kann modellhaft als Verhältnis von zwei Zahlen dargestellt werden, welches vom tatsächlichen Klang mehr oder weniger gut angenähert wird.
Bei reiner Intonation bzw. Resonanzfähigkeit der spezifischen Intervallsgröße - abhängig von der Klangerzeugungsart, dem Instrument oder Stimme - als eben ein ganzzahliges Verhältnis stellt sich im Klange eine Ruhe ein an deren Stelle bei Verlassen der Intervallsgröße in beide Richtungen, größer oder kleiner werdend, eine Schwebung genannte Bewegung tritt, deren Intensität mit dem Verstimmungsgrade zunimmt.

Die modellhafte Möglichkeit der Aufbereitung dieser Zahlenkonstellationen ist als Proportionslehre bekannt.
Die wichtigsten Merkmale und Gedankenschritte sind die folgenden:
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, usf. ist immer der gleiche Ton vom Namen her, nur in jeweils anderen Lagen- eine Verdoppelung der Zahl ist gleichbedeutend mit einer Oktavierung nach oben, gleich wie die Halbierung einer nach unten entspricht.
Zu sehen ist dabei schon, dass die Möglichkeiten der Töne innerhalb einer Oktave bei höherer Lage zunimmt. All diese Töne sind nur auf der Basis der Primzahl 2 (Ausn. 1).
Die Unterscheidung in Primzahlenkategorien ist ein wichtiges Werkzeug hierbei; mit jeder hinzukommenden höheren Primzahl verschiebt sich das sog. Limit, es kommen Zahlen und somit Töne hinzu, welche durch das vorangegangene Limit noch nicht erreicht werden konnten.

Nachdem wir die Oktave verhältnismäßig mit der Zahl 2 in Verbinung gebracht haben schreiten wir weiter zur nächstmöglichen Primzahl 3 und ihren Vielfachen.
3 im Verhältnis zu 2 bildet - aufsteigend gedacht, von einem gedachten Grundton 1 - das erste Intervall in der Obertonreihe außer der Oktave, es ist die sog. Quinte (hier bemerken wir eine Begriffsverwirrung, 3/2 aber Quinte, der fünfte Ton. Das rührt daher, dass der fünfte Ton sich auf eine konstruierte Tonleiter bezieht, welche so in dieser Form nicht nebeneinanderliegend in der Obertonreihe vorkommt, da nur eine Verhältnis daraus genommen wird, nämlich 3/2 und aufeinandergestapelt wird).
Die Größe der Quinte ist als Verhältnis angegeben eben 3/2 also 1,5.

Möchten wir eine absolute Größe daraus entstehen lassen, müssen wir dieses Verhältnis zu einer fixen Menge pro Oktave in Bezug setzen, bekannt ist die 1200 fache Oktavteilung als cents, 100 cents für den 12-Ton Halbton. Die Formel zur Umrechnung lautet log2(x/y)x1200, ist im Falle von 3/2 701,955c.
Noch kurz zur Primzahl 3 in der Obertonreihe: wie bei 2 schon gesehen sind auch wieder alle Verdoppellungen der gleiche Tonname, also 3, 6, 12, 24, usf. (die anderen Vielfachen greifen etwas vor, denn sie involvieren ja neue Primzahlen!)

Um eine Stimmung zu legen ist es nun möglich diese Verhältnisse der Obertonreihe zusammenzustellen, gedacht addieren, was einer Multiplikation entspricht, da es sich um ein Verhältnis und keine fixe Größe handelt (die cent-Werte können ja sehr wohl addiert und auch subtrahiert werden). Die Subtraktion ist analog dazu dann die Division.
Dazu ein Beispiel: 3/2 zweimal aufeinandergestellt bedeutet 3x3 / 2x2 und dies ist 9/4.
9 ist nun neu aufgetaucht, wo ist es zu verorten? Es folgt auf 8, und 8 ist der oktavversetzte Grundton. Diese None in Bezug gesetzt zum Grundton ist als Verhältnis ausgedrückt dann 9/8, der Ganzton. Das Primzahlen-Limit hierbei ist 3, da 9 aus 3 besteht und 8 aus 2.
Was geschieht bei dreifacher Stapelung? 3x3x3 ist 27 und kreiert im Zusammenklang mit der nächstniedrigen Entsprechung von 2 nämlich 16 das Verhältnis von 27/16, welches einer gr. Sexte entspricht.
Bei vierfacher Stapelung nun wird 81 erreicht (3 hoch 4), dies ist eine Terz (81/64).

Nun wird eine neue Ebene hinzugenommen: die Primzahl 5 und ihre Vielfachen.
Ein grundlegendes Verhältnis ist 5/4, die niedrigstzahlige große Terz der Obertonreihe. Merkmal niedrigzahliger Intervallverhältnisse ist die gute Resonanzeignung auch in tieferen Lagen.
Wird nun eine Übersicht über die Vielfachen von 5 erstellt, fällt die Nähe zu 81 auf, nämlich 80, eine andere Oktavtransposition durch die Verdoppelung (5, 10, 20, 40, 80).
Wenn nun diese Terz mit dem Verhältnis 5/4 mit der ‚Quintenwelt' auf der Basis der Primzahl 3, welche wir vorhin untersuchten, zusammengebracht werden soll, dann ist der Unterschied zwischen den zwei Terzen (81/64 ist klarerweise größer als 5/4) als 81/80 ausdrückbar. Um diesen Wert sind die aufeinandergestapelten Quinten zu groß für die neu definierte Zielterz. Wird von den Quinten je ein Viertel des Unterschiedes abgezogen, kann dies aber gelingen!
3/2 diviert durch (81/80) hoch 1/4, oder sehr elegant 5 hoch 1/4.

Diese Stimmung nennt sich Viertelkomma oder auch mitteltönige Stimmung, da dabei das Komma (81/80) geviertelt wird und die Ganztöne bis zur großen Terz gleich groß sind, d.h. der Ganzton die gr. Terz exakt halbiert.

Nach der 3-Limit & 5-Limit Reinstimmung und der zusammenführenden Viertelkommastimmung sollen nun die erwähnten Berechnungsarten vertieft werden:
zwei Intervalle aufeinanderzustellen bedeutet ja, wie schon erwähnt die Multiplikation auf der Verhältnisebene, der Abzug die Division (d.h. die Multiplikation mit dem Kehrwert).
Dazu einige 5-Limit Beispiele:

3/2 weniger 5/4 ist 6/5, das ergibt sich aus 3x4 / 5x2 und der anschließenden Kürzung durch 2.
2/1 weniger 5/4 ist 8/5
4/3 weniger 5/4 ist 16/15
u.Ä.

Gleich wie sich die bisherigen Bezüge auf Basis der Primzahlen 2, 3 & 5 erschlossen haben, so ist es auch bei allen folgenden, wie auf der Basis von 7, 11, 13, usw.